On non-exponential stability of delay systems of neutral type with non-singular neutral term

Rabah Rabah, Grigory M. Sklyar, Pavel Yu. Barkhayev

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2010

УДК 517.929
MSC2000: 34K40

Р. Рабах, Г.М. Скляр, П.Ю. Бархаев

О неэкспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием нейтрального типа с вырожденным нейтральным слагаемым [1]

В работе изучается сильная асимптотическая устойчивость систем нейтрального типа с одним вырожденным нейтральным слагаемым. Мы рассматриваем операторную модель системы в гильбертовом пространстве. Для получения достаточного условия сильной устойчивости мы используем две техники: базисов Рисса из инвариантных конечномерных подпространств и ограниченность резольвенты на некотором подпространстве спектрального разложения фазового пространства.

1. Введение

Мы рассматриваем системы с распределенным запаздыванием заданные следующим функционально-дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{-1}^{0} A_3(\theta)z(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad t \geq 0, \qquad (1)$$

где A_{-1} постоянная $n \times n$ матрица, A_2, A_3 матрицы размера $n \times n$ с элементами принадлежащими пространству $L_2(-1,0)$.

Исследуется задача асимптотической устойчивости данного класса систем. Задача экспоненциальной устойчивости систем нейтрального типа является хорошо изученной (см., например, [7]), однако, экспоненциально неустойчивые системы могут оказаться сильно асимптотически устойчивыми. Э тот факт является следствием специального поведения спектра систем нейтрального типа (см. [5]). В работе [10] задача асимптотической неэкспоненциальной устойчивости была подробно исследована в предложении невырожденности нейтрального слагаемого: $\det A_{-1} \neq 0$. В данной работе мы отказываемся от этого ограничения и показываем, что результат о неэкспоненциальной устойчивости доказанный в [10] имеет место вне зависимости от условия $\det A_{-1} \neq 0$.

Подход, который мы применяем, основывается на операторной модели систем (1) в гильбертовом пространстве $M_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}^n \times L_2(-1,0;\mathbb{C}^n)$ (см. [10, 6]):

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \mathcal{A}x(t) = \mathcal{A}\left(y(t), z_t(\cdot)\right) = \left(\int_{-1}^{0}[A_2(\theta)\dot{z}_t(\theta) + A_3(\theta)z_t(\theta)]\mathrm{d}\theta, \quad \frac{\mathrm{d}z_t(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right), \quad (2)$$

где оператор $\mathcal{A}$ порождает C_0-полугруппу и его область определения задается как

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(y, z(\cdot))^T : \ z \in H^1(-1,0;\mathbb{C}^n), y = z(0) - A_{-1}z(-1)\} \subset M_2.$$

Оператор $\mathcal{A}$ системы (1)-(2) обладает только дискретным спектром $\sigma(\mathcal{A})$, и, более того, рост полугруппы $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\}_{t\geq 0}$ определяется расположением спектра. Обозначим через $\omega_s = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ и $\omega_0 = \inf\{\omega : \ \|\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}x\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|\}$; имеет место соотношение $\omega_0 = \omega_s$ (см., например, [7]).

---

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта министерства науки и высшего образования Польши, грант No. N514 238438 и при поддержки École Centrale de Nantes, Франция.

Из последнего следует, что полугруппа $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t\geq 0}$ экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда спектр $\mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению $\omega_s < 0$. Однако, этот тип устойчивости не является единственно возможным для систем вида (1)-(2) (аналогичная ситуация имеет место для некоторых систем гиперболического типа). А именно, если $\omega_s = 0$ (и $A_{-1} \neq 0$), тогда существует последовательность собственных значений, чьи действительные части стремятся к нулю, а мнимые части стремятся к бесконечности. В этом критическом случае экспоненциальная устойчивость не возможна: $\|e^{t\mathcal{A}}\| \not\to 0$ при $t \to \infty$, но может иметь место асимптотическая неэкспоненциальная устойчивость: $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathcal{A}}x = 0$ для всех $x \in M_2$. Данный вид устойчивости исследовался для систем (1)-(2) в работе [10] при важном предположении $\det A_{-1} \neq 0$. Здесь мы предлагаем результат в общем случае, а именно, мы допускаем, что A_{-1} может быть вырождена и доказываем следующую теорему.

Theorem 1. *Положим $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$. Предположим, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ (необходимое условие). Следующие три взаимно исключающие ситуации могут иметь место:*

- *(i) σ_1 состоит только из простых собственных значений. Тогда система (1)-(2) асимптотически устойчива.*
- *(ii) Собственному значению $\mu \in \sigma_1$ отвечает жорданов блок размера больше единицы. Тогда система (1)-(2) неустойчива.*
- *(iii) Ни одно собственное значение из σ_1 A_{-1} не обладает жордановым блоком размера больше единицы, но для некоторого $\mu \in \sigma_1$ его собственное подпространство имеет размерность два или более. Тогда система (1)-(2) может быть как устойчивой так и неустойчивой.*

В случае $\det A_{-1} \neq 0$, спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в вертикальной полосе $d_1 \leq \mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{A}) \leq d_2$, и, более того, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\ln|\mu_m| + \mathrm{i}(\arg\mu_m + 2\pi k) + \bar{o}(1/k) : \mu_m \in \sigma(A_{-1}), k \in \mathbb{Z}\}$ (см. [11, 10]). Данный факт позволяет доказать существование базиса Рисса из обобщенных собственных векторов для оператора $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$, отвечающего случаю $A_2(\theta) \equiv A_3(\theta) \equiv 0$. В общем случае оператор $\mathcal{A}$ не порождает такого базиса Рисса (см. контрпример в [11] и некоторые общие условия в [13]), однако в работах [11, 10] было показано, что существует базис Рисса из $\mathcal{A}$-инвариантных конечномерных подпространств пространства M_2 (см. также работы [1, 2, 3], в которых исследуются базисы Рисса из подпространств решений). Существование такого базиса является мощным инструментом при анализе свойства устойчивости системы.

Если теперь предположить, что $\det A_{-1} = 0$, тогда приведенное выше расположение спектра порождается только ненулевыми собственными значениями $\mu_m \in \sigma(A_{-1})$, а весь спектр оператора может быть неограничен слева. В этом случае существование базиса Рисса из $\mathcal{A}$-инвариантных конечномерных подпространств для всего пространства M_2 не может быть гарантировано. Как следствие, доказательство пункта (i) приведенное в [10], которое существенно опирается на технику базисов Рисса, не может быть применено и необходим другой способ анализа устойчивости.

Целью данной работы является доказательство пункта (i) теоремы 1 для систем нейтрального типа с вырожденным нейтральным слагаемым. Для этого мы комбинируем технику базисов Рисса с анализом ограниченности резольвенты на некотором $\mathcal{A}$-инвариантном подпространстве. А именно, рассматривая собственные значения оператора $\mathcal{A}$, которые лежат достаточно близко к мнимой оси и используя результаты работы [11, 10], можно гарантировать, что соответствующие собственные вектора образуют базис Рисса замыкания своей линейной оболочки M_2^1. Далее, мы доказываем, что фазовое пространство M_2 допускает спектральное разложение в прямую сумму двух $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств: $M_2 = M_2^1 \oplus M_2^0$, где $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство M_2^0 таково, что резольвента $R(\lambda, A)$

равномерно ограничена на нем для всех $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geq 0\}$. Таким образом сужение полугруппы $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}|_{M_2^0}\}_{t\geq 0}$ экспоненциально устойчиво (см., например, [12]), а для доказательства асимптотической устойчивости сужения полугруппы $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}|_{M_2^1}\}_{t\geq 0}$ мы используем те же методы, что и в работе [10]. Указанная схема требует достаточно громоздкой техники, которая только вкратце приводится в данной работе.

Кроме того, мы приводим пример семейства нейтральных систем, иллюстрирующий пункт (iii). В работе [10] пункт (iii) был показан через построение системы вида (2) в пространстве M_2 и это построение существенно использовало технику базисов Рисса. Это мотивировало нас к построению более простого и наглядного примера в терминах систем вида (1).

2. Представление фазового пространства

Дадим более точное описание спектра оператора $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ множество различных ненулевых собственных значений матрицы A_{-1} и через $p_1, \ldots, p_\ell$ их кратности. Через $\widetilde{\mathcal{A}}$ обозначим оператор $\mathcal{A}$ в случае $A_2(\theta) \equiv A_3(\theta) \equiv 0$. Несложно видеть, что собственные значения $\widetilde{\mathcal{A}}$ задаются выражением $\widetilde{\lambda}_m^k = \ln|\mu_m| + \mathrm{i}(\arg\mu_m + 2\pi k)$, $m = \overline{1,\ell}$, $k \in \mathbb{Z}$. Собственные значения оператора $\mathcal{A}$ являются корнями уравнения

$$\det\triangle(\lambda) = 0, \quad \triangle(\lambda) = \triangle_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\lambda I + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}A_{-1} + \lambda\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{\lambda s}A_2(s)\mathrm{d}s + \int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{\lambda s}A_3(s)\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Рассуждая как в работе [9, Theorem 4], мы доказываем, что существует номер N_1 такой, что суммарная кратность корней уравнения $\det\triangle(\lambda) = 0$, содержащаяся внутри каждого круга $L_m^k(r^{(k)})$, равна p_m для всех $m = \overline{1,\ell}$ и $k : |k| \geq N_1$, где $L_m^k(r^{(k)})$ есть окружности с центрами в $\widetilde{\lambda}_m^k$ и с радиусами $r^{(k)}$, удовлетворяющими соотношению $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(r^{(k)})^2 < \infty$. Обозначим эти корни (собственные значения оператора $\mathcal{A}$) как λ_m^k, $1 \leq m \leq \ell$, $|k| \geq N_1$.

Напомним обозначение $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$ и предположим, что $\sigma_1 = \{\mu_1, \ldots, \mu_{\ell_1}\}$, $\ell_1 \leq \ell$. Всюду далее мы предполагаем, что $p_1 = \ldots = p_{\ell_1} = 1$ (так как наша цель доказать пункт i) теоремы 1).

Для построения разложения пространства M_2 мы выделяем такое подмножество спектра $\sigma(\mathcal{A})$:

$$\Lambda_1 = \{\lambda_m^k \in \sigma(\mathcal{A}),\ 1 \leq m \leq \ell_1, |k| \geq N_2\} \quad \text{для некоторого} \quad N_2 \geq N_1, \tag{4}$$

и два подпространства в M_2:

$$M_2^1 = \mathrm{Cl\,Lin}\{\varphi :\ (\mathcal{A} - \lambda I)\varphi = 0,\ \lambda \in \Lambda_1\}, \tag{5}$$

$$\widehat{M_2^1} = \mathrm{Cl\,Lin}\{\psi :\ (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I)\psi = 0,\ \lambda \in \Lambda_1\}. \tag{6}$$

Очевидно, M_2^1 является $\mathcal{A}$-инвариантным и $\widehat{M_2^1}$ является $\mathcal{A}^*$-инвариантным. Введем подпространство M_2^0 удовлетворяющее

$$M_2 = \widehat{M_2^1} \overset{\perp}{\oplus} M_2^0. \tag{7}$$

Так как M_2^0 является ортогональным дополнением к $\widehat{M_2^1}$ в M_2, то оно $\mathcal{A}$-инвариантно.

Remark 1. Множество Λ_1 определяется значением $N_2 \in \mathbb{N}$. Для любого малого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое N_2 такое, что Λ_1 принадлежит вертикальной полосе $\{\lambda :\ -\varepsilon < \mathrm{Re}\lambda < 0\}$.

Remark 2. Собственные вектора $\{\varphi_m^k\}$ оператора $\mathcal{A}$, соответствующие $\lambda_m^k \in \Lambda_1$, образуют базис Рисса замыкания своей линейной оболочки. Аналогичное утверждение верно для собственных векторов $\{\psi_m^k\}$ оператора $\mathcal{A}^*$, которые соответствуют $\overline{\lambda_m^k}$, $\lambda_m^k \in \Lambda_1$.

Theorem 2. (о разложении в прямую сумму). *Имеет место следующее разложение пространства M_2 в прямую сумму:*

$$M_2 = M_2^1 \oplus M_2^0, \qquad M_2^1, M_2^0 \text{ – } \mathcal{A}\text{-инвариантны и заданы (4)–(7).}$$

Доказательство. Собственные вектора φ_m^k: $(\mathcal{A}-\lambda_m^k I)\varphi_m^k = 0$ и ψ_m^k: $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda_m^k} I)\psi_m^k = 0$ имеют вид (см. [10, 9]):

$$\varphi_m^k = \left([I - \mathrm{e}^{-\lambda_m^k} A_{-1}]x_m^k,\ \mathrm{e}^{\lambda_m^k \theta} x_m^k\right), \qquad x_m^k \in \mathrm{Ker}\triangle(\lambda_m^k), \tag{8}$$

$$\psi_m^k = \left(y_m^k,\ [\overline{\lambda_m^k}\mathrm{e}^{-\overline{\lambda_m^k}\theta} - A_2^*(\theta) + \mathrm{e}^{-\overline{\lambda_m^k}\theta}\int_0^\theta \mathrm{e}^{\overline{\lambda_m^k}s}(A_3^*(s) + \overline{\lambda_m^k}A_2^*(s))\mathrm{d}s]y_m^k\right),$$
$$y_m^k \in \mathrm{Ker}\triangle^*(\overline{\lambda_m^k}).$$

Семейства функций $\{\varphi_m^k\}$, $\{\psi_i^j\}$ являются биортонормальными после нормализации и, более того,

$$\langle \varphi_m^k, \psi_m^k \rangle_{M_2} = -\langle \triangle'(\lambda_m^k)x_m^k, y_m^k\rangle_{\mathbb{C}^n}, \qquad \text{где } \triangle'(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\triangle(\lambda). \tag{9}$$

В силу (9) и (7) мы имеем $\varphi_m^k = \gamma_m^k + a_m^k\widehat{\psi}_m^k$, $\gamma_m^k \in M_2^0$, $\widehat{\psi}_m^k = \frac{1}{\lambda_m^k}\psi_m^k$. Следовательно, для любого $x \in M_2$ верно:

$$x = \widehat{x}_0 + \sum_{(m,k)\in Z} b_m^k \widehat{\psi}_m^k = \widehat{x}_0 - \sum_{(m,k)\in Z}\frac{b_m^k}{a_m^k}\gamma_m^k + \sum_{(m,k)\in Z}\frac{b_m^k}{a_m^k}\varphi_m^k = x_0 + \sum_{(m,k)\in Z} c_m^k \varphi_m^k, \tag{10}$$

где $\widehat{x}_0 \in M_2^0$, $x_0 = \widehat{x}_0 - \sum\limits_{(m,k)\in Z}\frac{b_m^k}{a_m^k}\gamma_m^k \in M_2^0$ и $c_m^k = \frac{b_m^k}{a_m^k}$, $\sum\limits_{(m,k)\in Z}|b_m^k|^2 < \infty$, $Z = \{(m,k) :\ 1 \le m \le l_1, |k| \ge N\}$. Для доказательства сходимости рядов из (10) мы используем следующие оценки:

Lemma 1. *Пусть $\|x_m^k\|_{\mathbb{C}^n} = 1$, $\|y_m^k\|_{\mathbb{C}^n} = 1$. Существуют константы $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $0 < C_1 < C_2$ такие, что*

(1) $\|\varphi_m^k\| \le C$, $\quad \|\widehat{\psi}_m^k\| \le C$, *где* $\widehat{\psi}_m^k = \frac{1}{\lambda_m^k}\psi_m^k$;

(2) $0 < C_1 \le \left|\frac{1}{\lambda_m^k}\langle \triangle'(\lambda_m^k)x_m^k, y_m^k\rangle\right| \le C_2, \qquad$ *для всех* $1 \le m \le l_1$, $|k| \ge N$.

Эти оценки основаны на анализе структуры семейства матриц $\triangle(\lambda_m^k)$ и $\triangle'(\lambda_m^k)$ для больших значений параметра $|k|$. □

3. Ограниченность резольвенты

Следующим шагом является доказательство того факта, что сужение резольвенты на инвариантное подпространство M_2^0: $R(\lambda, \mathcal{A})|_{M_2^0}$ является равномерно ограниченным в замкнутой правой комплексной полуплоскости. Явная форма резольвенты оператора $\mathcal{A}$ приведена в работе [11, 10]:

$$R(\lambda,\mathcal{A})\begin{pmatrix} z \\ \xi(\cdot)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda}A_{-1}\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\xi(s)\mathrm{d}s + (I - \mathrm{e}^{-\lambda}A_{-1})\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda) \\ \int_0^\theta \mathrm{e}^{\lambda(\theta - s)}\xi(s)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{\lambda\theta}\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $z \in \mathbb{C}^n, \xi(\cdot) \in L_2(-1,0;\mathbb{C}^n)$, $\triangle(\lambda)$ определяется (3) и $D(z,\xi,\lambda)$ – следующая вектор-функция: $D(z,\xi,\lambda) = z + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}A_{-1}\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\xi(\theta)\mathrm{d}\theta - \int_{-1}^0 A_2(\theta)\xi(\theta)\mathrm{d}\theta - \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{\lambda\theta}[\lambda A_2(\theta) + A_3(\theta)]\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\lambda s}\xi(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta$.

Theorem 3. (об ограниченности резольвенты). *Сужение резольвенты $R(\lambda,\mathcal{A})$ на подпространство M_2^0 является равномерно ограниченным для всех $\lambda : \mathrm{Re}\lambda \ge 0$, то есть существует $C > 0$ такое, что $\|R(\lambda,\mathcal{A})x\| \le C\|x\|$, $x \in M_2^0$.*

Доказательство. Из явного вида резольвенты (11) можно заключить, что основная сложность заключается в доказательстве ограниченности слагаемого $\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda)$. А именно, так как $\det\triangle(\lambda_m^k) = 0$ для $\lambda_m^k \in \Lambda_1$ и $\mathrm{Re}\lambda_m^k \to 0$ при $k \to \infty$, то норма $\triangle^{-1}(\lambda)$ бесконечно растет когда $\mathrm{Re}\lambda \to 0$ и $\mathrm{Im}\lambda \to \infty$ одновременно. Однако произведение $\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda)$ оказывается ограниченным для $(z,\xi(\theta)) \in M_2^0$:

Lemma 2. *Вектор-функция $\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda)$ равномерно ограничена в ограниченных окрестностях $U_\delta(\lambda_m^k)$ собственных значений $\lambda_m^k \in \Lambda_1$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$, т.е.:*

1. Для всех $1 \le m \le \ell_1$, $|k| > N$ и $\lambda \in U_\delta(\lambda_m^k)$ верна оценка $\|\triangle^{-1}(\lambda)D(z,\xi,\lambda)\| \le C_{m,k}$;

2. Существует $C > 0$ такое, что $C_{m,k} \le C$ для всех $1 \le m \le \ell_1$, $|k| > N$.

Доказательство этого утверждения является наиболее технически сложным в данной работе, в частности, оно требует доказательства следующего важного соотношения: $D(z,\xi,\lambda_m^k) \in \mathrm{Im}\triangle(\lambda_m^k)$. □

4. Основной результат

Используя результаты приведенные выше мы покажем верность пункта (i) теоремы 1 сформулированной во введении.

Theorem 4. (об устойчивости). *Если $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda :\ \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ и $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$ содержит только простые собственные значения, тогда система (1)-(2) является сильно асимптотически устойчивой.*

Доказательство. Разложим фазовое пространство в прямую сумму $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств M_2^1 и M_2^0 (теорема 2). Подпространство M_2^1 обладает базисом Рисса из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, и, применяя технику сходную с приведенной в работе [10], мы доказываем, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}x = 0$ для всех $x \in M_2^1$, т.е. полугруппа $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}|_{M_2^1}\}_{t\ge0}$ является сильно асимптотически устойчивой. Из теоремы 3 следует, что сужение $R(\lambda,\mathcal{A})|_{M_2^0}$ ограничено в полуплоскости $\{\lambda :\ \mathrm{Re}\lambda \ge 0\}$ и, следовательно, сужение $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}|_{M_2^0}\}_{t\ge0}$ является экспоненциально устойчивым (см., например, [12]). Следовательно, полугруппа $\{\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\}_{t\ge0}$ является сильно асимптотически устойчивой. □

Отметим, что как доказательство пункта (ii), так и доказательство пункта (iii) теоремы не используют существования базиса Рисса пространства M_2 и, следовательно, не используют существенно предположения $\det A_{-1} \ne 0$. Однако, для полноты мы приводим здесь пример иллюстрирующий пункт (iii) теоремы 1.

Пример. Мы рассматриваем следующий частный случай уравнения (1):

$$\dot z(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot z(t-1) + \begin{pmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z(t), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Матрица A_{-1} обладает двумерным собственным пространством соответствующим собственному значению $\mu = -1 \in \sigma_1$. Собственные значения соответствующего оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяют уравнению $\lambda \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda + b\mathrm{e}^{\lambda} = 0$. Таким образом, для всех значений s операторы $\mathcal{A}$ обладают одним и тем же спектром. Используя результаты о расположении корней трансцендентных функций доказанные в работе Л.С. Понтрягина [4, 1942], мы доказываем, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda :\ \mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Однако, при $s = 0$ оператор $\mathcal{A}$ обладает только собственными векторами (нет корневых векторов) и система (12) является устойчивой, а при $s \ne 0$ оператор $\mathcal{A}$ обладает семейством корневых векторов и система (12) неустойчива.

Список литературы

[1] Власов В.В. *О базисности экспоненциальных решений функционально-дифференциальных решений уравений в пространствах Соболева*, Докл. РАН. – 2001. – 381, №3 – С. 302-304.

[2] Власов В.В. *О базисности семейства экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравений*, Изв. вузов Мат. – 2002. – №6 – С. 7-13.

[3] Власов В.В., Медведев Д.А. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории* // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 30. С. 3-173 – 2008.

[4] Понтрягин Л.С. *О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций*, Известия АН СССР. – 1942. – 6. – стр. 115-134.

[5] W. E. Brumley. *On the asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations of neutral type*, J. Differential Equations, 7:175–188, 1970.

[6] Burns, John A., Herdman, Terry L., Stech, Harlan W. *Linear functional-differential equations as semigroups on product spaces*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 14, Issue 1 (1983), 98–116.

[7] Jack K. Hale and Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional-differential equations*// volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York – 1993.

[8] R. Rabah, G. M. Sklyar, and P. Yu. Barkhayev. *Stability analysis of mixed retarded-neutral type systems*, Preprint IRCCyN, Nantes, RI2008_8, 2008.

[9] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *On strong regular stabilizability for linear neutral type systems*, J. Differential Equations 45 (2008), No. 3, 569–593.

[10] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space*, J. Differential Equations 214 (2005), No. 2, 391–428.

[11] R. Rabah, G. M. Sklyar, and A. V. Rezounenko. *Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 337(1):19–24, 2003.

[12] Jan van Neerven. *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators* // volume 88 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel – 1996.

[13] S. M. Verduyn Lunel and D. V Yakubovich. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations*, Integral Equations Oper. Theory 27(1997), 347-378.

E-mail: sklar@univ.szczecin.pl, rabah@emn.fr, pbarhaev@inbox.ru

Р. Рабах, France, F-44307, France, Nantes Cedex 3, IRCCyN, École des Mines de Nantes, 4 rue Alfred Kastler

Г.М. Скляр, 70451, Poland, Szczecin, Institute of Mathematics, University of Szczecin, Wielkopolska str., 15

П.Ю. Бархаев, 61077, Украина, Харьков, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений и управления, пл. Свободы, 4.

Abstract

The strong asymptotic stability property of mixed retarded-neutral type systems is studied. We consider an operator model of the system in Hilbert space. Two technics are combined to get the condition of asymptotic non-exponential stability: the existence of a Riesz basis of invariant finite-dimensional subspaces and the boundedness of the resolvent in some subspaces of a special decomposition of the state space.

Аннотация

В работе изучается сильная асимптотическая устойчивость систем нейтрального типа с одним вырожденным нейтральным слагаемым. Мы рассматриваем операторную модель системы в гильбертовом пространстве. Для получения достаточного условия сильной устойчивости мы используем две техники: базисов Рисса из инвариантных конечномерных подпространств и ограниченность резольвенты на некотором подпространстве спектрального разложения фазового пространства.

Анотація

У роботі вивчається сильна асимптотична стійкість систем нейтрального типу з одним виродженим нейтральним доданком. Ми розглядаємо операторну модель системи в гільбертовому просторі. Для отримання достатньої умови сильної стійкості ми використовуємо дві техніки: базисів Рісса з інваріантних скінченновимірних підпросторів і обмеженість резольвенти на деякому підпросторі спектрального розкладу фазового простору.